**BAB I**

**MATRIKS**

* 1. **Pendahuluan**

Definisi

*Kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung.*

Suatu matriks tersusun atas baris dan kolom, jika matriks tersusun atas *m* baris dan *n* kolom maka dikatakan matriks tersebut berukuran (berordo) *m x n.* Penulisan matriks biasa menggunakan huruf besar *A, B, C* dan seterusnya, sedangkan penulisan matriks beserta ukurannya (matriks dengan *m* baris dan *n* kolom) adalah dan seterusnya.

Bentuk umum dari adalah dengan disebut elemen dari *A* yang terletak pada baris *i* dan kolom *j.*

* 1. **Jenis-jenis Matriks**

Ada beberapa jenis matriks yang perlu diketahui dan sering digunakan pada pembahasan selanjutnya, yaitu:

1. Matriks baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya mempunyai satu baris.

Contoh :

1. Matriks kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya mempunyai satu kolom.

Contoh :

1. Matriks bujur sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya. Karena sifatnya yang demikian ini, dalam matriks bujur sangkar dikenal istilah *elemen diagonal* yang berjumlah *n* untuk matriks bujur sangkar yang berukuran *nxn,* yaitu:

Contoh :

* + - dengan elemen diagonal dan
    - dengan elemen diagonal dan

1. Matriks nol

Matriks nol adalah matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol.

Contoh :

Sifat-sifat dari matriks nol adalah

1. Matriks diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah nol dan dinotasikan dengan *D*. Dalam hal ini tidak diisyaratkan bahwa entri atau elemen diagonalnya harus tak nol.

Contoh :

1. Matriks skalar

Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua entri atau elemen pada diagonalnya sama.

Contoh :

1. Matriks identitas

Matriks identitas adalah matriks skalar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai 1 dan dinotasikan dengan *I*.

Contoh :

Sifat-sifat matriks identitas adalah

1. Matriks segitiga atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh :

1. Matriks segitiga bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh :

1. Matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris tereduksi jika memenuhi syarat-syarat berikut :

1. Untuk semua baris yang elemen-elemennya tak nol, maka bilangan pertama pada baris tersebut haruslah = 1 (disebut satu utama).
2. Untuk sebarang dua baris yang berurutan, maka satu utama yang terletak pada baris yang lebih bawah harus terletak lebih kekanan dari pada satu utama pada baris yang lebih atas.
3. Jika suatu baris semua elemennya adalah nol, maka baris tersebut diletakkan pada bagian bawah matriks.
4. Kolom yang memiliki satu utama harus memiliki elemen nol ditempat lainnya.

Contoh :



Matriks *A, B* dan *C* adalah matriks-matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi dan notasi 1 menyatakan satu utamanya. Contoh berikut menyatakan matriks-matriks yang bukan dalam bentuk eselon baris tereduksi.

Contoh :

Matriks *D* dan *E* bukan dalam bentuk eselon baris tereduksi karena elemen bernilai 1 sehingga tidak memenuhi syarat ke *iv* (harusnya = 0), sedangkan matriks *E* tidak memenuhi karena baris kedua yang merupakan baris nol letaknya mendahului baris ketiga yang merupakan baris tak nol, sehingga syarat ketiga tidak terpenuhi.

Jika suatu matriks hanya memenuhi syarat 1-3 saja, maka matriks tersebut dikatakan matriks eselon baris.

* 1. **Operasi-operasi pada matriks**

1. Kesamaan dua matriks

Dua buah matriks *A* dan *B* dikatakan sama (*A* = *B*) apabila matriks *A* dan *B* mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama (berordo sama) dan semua entri atau elemen yang termuat di dalamnya sama .

Contoh :

dan

dan

dan

dan

dan

dan

1. Penjumlahan matriks

Operasi penjumlahan dapat dilakukan pada dua buah matiks yang memiliki ukuran (berordo) sama.

Aturan penjumlahan

Dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian pada kedua matriks.

Contoh :

* + - dan
    - dan
    - dan
    - dan

Apabila *A* dan *B* merupakan dua matriks yang ukurannya sama, maka hasil penjumlahannya adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri atau elemen yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat dijumlahkan.

1. Pengurangan matriks

Operasi pengurangan dapat dilakukan pada dua buah matiks yang memiliki ukuran (berordo) sama.

Aturan pengurangan

Dengan mengurangkan elemen-elemen yang seletak atau bersesuaian pada kedua matriks.

Contoh :

* + - dan
    - dan
    - dan
    - dan

Apabila *A* dan *B* merupakan dua matriks yang ukurannya sama, maka hasil pengurangannya adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan bersama-sama entri atau elemen yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat dikurangkan.

1. Perkalian matriks dengan skalar

Jika *k* adalah suatu bilangan skalar dan matriks *A*=(*a*ij ) maka matriks *kA*=(*kaij* ) adalah suatu matriks yang diperoleh dengan mengalikan semua entri atau elemen matriks *A* dengan *k*.

Contoh :

* + - dan
    - dan

1. Perkalian matriks dengan matriks

Operasi perkalian matriks dapat dilakukan pada dua buah matriks (*A* dan *B*) jika jumlah kolom matriks *A* = jumlah baris matriks *B.*

Aturan perkalian

Jika matriks adalah matriks dengan ukuran *m x n* dan adalah matriks dengan ukuran *n x p,* maka *A\*B* merupakan matriks dimana elemen dari merupakan penjumlahan dari perkalian elemen-elemen matriks *A* baris *i* dengan elemen-elemen matriks *B* kolom *j* atau dapat kita tuliskan .

Contoh :

* + - dan

yang merupakan suatu skalar.

* + - dan
    - dan

Jadi .

* + Perkalian matriks dengan matrks pada umumnya tidak bersifat komutatif.
  + Beberapa sifat berikut ini berhubungan dengan perkalian matriks.
    - Apabila *A* merupakan suatu matriks persegi, maka *A² = A.A ; A³=A².A* dan seterusnya
    - Apabila *AB = BC* maka tidak dapat disimpulkan bahwa *A=C* (tidak berlaku sifat kanselasi atu penghapusan)
    - Apabila *AB = AC* belum tentu *B = C*
    - Apabila *AB = 0* maka tidak dapat disimpulkan bahwa *A=0* atau *B=0*
    - Terdapat beberapa hukum perkalian matriks :

1. *A(BC) = (AB)C*
2. *A(B+C) = AB+AC*
3. *(B+C)A = BA+CA*
4. *A(B-C)=AB-AC*
5. *(B-C)A = BA-CA*
6. *A(BC) = (AB)C= B(AC)*
7. *AI = IA = A*
8. Perpangkatan matriks

Sifat perpangkatan pada matriks sama seperti sifat perpangkatan pada bilangan-bilangan untuk setiap a bilangan riil, dimana berlaku :

*A2 = A A*

*A3 = A2 A*

*A4 = A3 A*

*A5 = A4 A;* dan seterusnya

1. Tranpose matriks

Tranpose matriks *A* didefinisikan sebagai matriks yang baris-barisnya merupakan kolom matriks *A* dan dinotasikan dengan .

Jika A adalah suatu matriks *m x n*, maka tranpose *A* dinyatakan oleh dan didefinisikan dengan matriks *n x m* yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari *A*, kolom keduanya adalah baris kedua dari *A*, demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari *A* dan seterusnya.

Contoh :

maka tranpose matriks *A* adalah

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

1. , dengan *k* adalah sebarang scalar
2. Matriks Invers

Jika *A, B* matriks bujur sangkar dan berlaku ( *I* adalah matriks identitas), maka dikatakan bahwa *A* dapat dibalik dan *B* adalah matriks invers dari *A* (notasi ).

Contoh :

dan

Maka dan

Sifat yang berlaku :

* 1. **Matriks Elementer**

Suatu matriks berukuran dikatakan matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks identitas dengan melakukan operasi baris elementer tunggal (hanya melakukan operasi baris elementer sebvanyak 1 kali).

Dalam operasi baris elementer ada beberapa operasi yang dapat digunakan, yaitu :

1. Menukar letak dua baris;
2. Mengalikan suatu baris dengan scalar tak nol;
3. Menambah suatu baris dengan kelipatan baris yang lain.

Opersi-operasi baris elementer tersebut mempunyai tujuan membawa matriks menjadi matriks dengan bentuk lebih sederhana.

Contoh :

* + (Matriks ini diperoleh dari menukar baris 1 dengan baris 2 dari matriks ).
  + (Matriks ini diperoleh dari mengalikan baris ke 2 dengan skalar dari matriks .
  + (Matriks ini diperoleh dari menambah baris 1 dengan kelipatan baris 3 dari matriks ).
  1. **Trasformasi Elementer**

Terhadap elemen atau entri suatu matriks dapat dilakukan transformasi atau penukaran atau perpindahan menurut baris dan kolom matriks.

Kaidah-kaidah transformasi elementer :

1. Apabila ada matriks , maka transformasi elemen-elemen pada baris ke-*i* dengan baris ke-*j* ditulis atau , yang merupakan penukaran semua elemen baris ke-*i* dengan baris ke-*j* atau baris ke-*i* dijadikan baris ke-*j* dan baris ke-*j* dijadikan baris ke-*i*.

Contoh :

* + maka dan

1. Transformasi elemen-elemen pada kolom ke-*i* dengan kolom ke-*j* ditulis atau , yang merupakan penukaran semua elemen kolom ke-*i* dengan kolom ke-*j* atau kolom ke-*i* dijadikan kolom ke-*j* dan kolom ke-*j* dijadikan kolom ke-*i*.

Contoh :

* + maka dan

1. Mengalikan baris ke-*i* dengan skalar , ditulis dan mengalikan kolom ke-*i* dengan λ ditulis .

Contoh :

* + maka dan
  + maka dan

1. Menambah baris ke-*i* dengan λ kali baris ke-*j*, ditulis atau .

Contoh :

* + maka dan

1. Menambah kolom ke-*i* dengan λ kali kolom ke-*j*, ditulis atau .

Contoh :

* + maka dan
  1. **Matriks Ekivalen**

Dua matriks *A* dan *B* disebut matriks ekivalen, ditulis jika *B* diperoleh dari *A* dengan melakukan transformasi elementer, dan sebaliknya *A* diperoleh dari *B* dengan melakukan invers transformasi elemeneter.

Contoh :

* + dan , adalah ekivalen sebab .
  1. **Ruang Baris dan Kolom Matriks**

Diketahui matriks

* + Ruang baris matriks terbentuk dari baris-baris *A* yang dinamakan vector-vektor baris *A.*

Yaitu vector-vektor

* + Ruang kolom matriks terbentuk dari kolom-kolom *A* yang dinamakan vector-vektor kolom *A.*

Yaitu vector-vektor

Ruang bagian dari yang dibangun oleh vector-vektor baris dinamakan ruang baris dari *A*, dan ruang bagian dari yang dibangun oleh vector-vektor kolom dinamakan ruang kolom dari *A*.

Contoh :

* + maka vector-vektor baris dari *A* adalah dan vector-vektor kolom dari *A* adalah
  1. **Rank Matriks**

Rank baris dari matriks *A* adalah dimensi dari ruang baris matriks *A*.

Rank kolom dari matriks *A* adalah dimensi dari ruang kolom matriks *A*.

Jika rank baris = rank kolom maka rank matriks *A* yaitu adalah harga atau nilai dari rank baris atau rank kolom matriks *A* tersebut.

Dengan kata lain rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum dari vector-vektor baris atau kolom yang bebas linier. Untuk mencari **rank matriks dapat dilakukan dengan transformasi elementer, yaitu dengan cara sebanyak mungkin mengubah baris kolom menjadi vector nol.**

Contoh :

Tentukan rank dari matriks , lakukan transformasi elementer baris dan kolom:

Jadi rank matriks *A* adalah .

**Pembahasan**

Jadi Rank Matriks A adalah 2

**Latihan Transformasi Elementer**

1. Diketahui matriks maka tentukan
2. Diketahui matriks , , , dan

Hitunglah operasi-operasi berikut.

**BAB II**

**DETERMINAN MATRIKS**

Determinan suatu matriks adalah suatu fungsi scalar dengan domain matriks bujur sangkar. Dengan kata lain, determinan merupakan pemetaan dengan domain berupa matriks bujur sangkar, sementara kodomain berupa suatu nilai scalar. Determinan suatu matriks sering digunakan dalam menganalisa suatu matriks, seperti : untuk memeriksa keberadaan invers matriks, menentukan solusi system persamaan linier dengan aturan cramer, pemeriksaan basis suatu ruang vector dll.

1. **Determinan Matriks Ordo**

Matriks berordo 2 × 2 yang terdiri atas dua baris dan dua kolom. Pada bagian ini akan dibahas determinan dari suatu matriks berordo 2 × 2. Misalkan *A* adalah matriks persegi ordo 2 × 2 dengan bentuk *A* = 

Determinan matriks *A* di definisikan sebagai selisih antara perkalian elemen elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder. Determinan dari matriks *A* dinotasikan dengan det *A* atau |*A*|. Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.

Berdasarkan definisi determinan suatu matriks, Anda bisa mencari nilai

determinan dari matriks *A*, yaitu:

det *A* = |*A*| = = *a* × *d* – *b* × *c* = *ad* – *bc*

**Contoh :**

*A* = , maka det A = |*A*| = = 1.4 – 2.3 = 4 – 6 = -2

1. **Determinan Matriks Ordo**

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari determinan mariks berordo 3 × 3.

Misalkan *A* matriks persegi berordo 3 × 3 dengan bentuk

*A* = 

Untuk mencari determinan dari matriks persegi berordo 3 × 3, akan digunakan suatu metode yang dinamakan *metode Sarrus*.

Adapun langkah-langkah yang harus di lakukan untuk mencari determinan matriks berordo 3 × 3 dengan *metode Sarrus* adalah sebagai berikut:

* 1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua matriks *A* di sebelah kanan tanda determinan.
  2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama

dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama (lihat gambar). Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan *Du*



*Du* = 

* 1. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder (lihar gambar). Nyatakan jumlah hasil harga tersebut dengan *Ds*.



*Ds* = 

* 1. Sesuai dengan defi nisi determinan matriks maka determinan dari matriks *A* adalah selisih antara *Du* dan *Ds* yaitu *Du* – *Ds*.

det *A =*

= ()- ()

**Contoh :**

Diketahui matriks *A* = Tentukan nilai determinan matriks *A*.

Jawab :

det *A* = 

= [(–3 × 1 × (–1)) + (4 × 3 × 1) + (2 × 2 × 0)] – [(1 × 1 × 2) +

(0 × 3 × (–3)) + (–1 × 2 × 4)]

= (3 + 12 + 0) – (2 + 0 – 8) = 21

Jadi, nilai determinan matriks *A* adalah 21.

1. **Minor dan Kofaktor Matriks**

Jika *A* adalah matriks kuadrat, maka minor dinyatakan oleh adalah submatriks *A* yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-*i* kolom ke-*j.* Sedangkan kofaktor dinyatakan oleh didefinisikan sebagai : .

**Contoh :**

Adapun minor matriks *A* pada baris satu adalah

Adapun minor matriks *A* pada baris dua adalah

Adapun minor matriks *A* pada baris tiga adalah

**Contoh :**

Determinan suatu matriks kuadrat *A* dapat juga dihitung dengan menggunakan **Ekspansi Kofaktor** dengan menggunakan baris atau kolom.

**Teorema**

Determinan matriks *A* yang berukuran dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil kali yang dihasilkan, yaitu untuk setiap dan , maka

(Ekspansi kofaktor sepanjang baris *i*)

(Ekspansi kofaktor sepanjang kolom *j*)

**Contoh :**

Tentukan determinan matriks

Penyelesaian:

* Metode kofaktor berdasarkan ekspansi baris pertama.

* Metode kofaktor berdasarkan ekspansi baris kedua.

* Metode kofaktor berdasarkan ekspansi baris ketiga.

1. **Sifat-sifat Determinan Matriks**
2. Jika *A* adalah matriks persegi yang memuat sebaris bilangan nol, maka .

**Contoh :**

1. Jika *A* adalah matriks segitiga , maka adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama, yakni

**Contoh :**

1. Jika *A’* adalah matriks yang dihasilkan dengan baris tunngal *A* dikalikan dengan konstanta *k*, maka .

**Contoh :**

misalkan

Karena dan maka .

Jadi .

1. Jika *A’* adalah matriks yang dihasilkan dengan dua baris *A* dipertukarkan, maka .

**Contoh :**

Karena dan

Jadi .

1. Jika *A’* adalah matriks yang dihasilkan dengan kelipatan satu baris *A* ditambahkan pada baris lain, maka .

**Contoh :**

Karena dan

Jadi .

1. Jika *A* sebarang matriks persegi, maka .

**Contoh :**

Karena dan

Jadi .

1. Jika *A* dan *B* matriks persegi yang ukurannya sama, maka .

**Contoh :**

Karena dan

Jadi .

1. Suatu matriks *A* dapat dibalik atau punya invers jika dan hanya jika

**Contoh :**

1. Jika suatu matriks *A* mempunyai invers maka

**Contoh :**

Karena dan , Jadi .

**BAB III**

**INVERS MATRIKS**

**Pendahuluan**

Suatu matriks bujur sangkar *A* berukuran atau berordo disebut mempunyai invers, jika ada suatu matriks *B* sedemikian hingga . Matriks *B* disebut invers matriks *A* dan dinotasikan dengan . Secara umum, hanya matriks persegi atau bujur sangkar yang mempunyai invers, jika ada invers bersifat tunggal (hanya satu). Matriks yang mempunyai invers disebut matriks invertible atau nonsingular.

**Definisi**

**Teorema**

Sebuah matriks kuadrat *A* dapat dibalik atau invertible jika dan hanya jika .

Metode mencari invers suatu matriks.

1. **Matriks Adjoin**

Matriks kofaktor adalah suatu matriks dimana setiap elemen diganti dengan kofaktornya , sehingga disebut matriks kofaktor. Matriks adjoin adalah tranpose dari suatu matriks kofaktor dan dinotasikan dengan . Dengan matriks adjoin kita dapat mencari invers suatu matriks, menggunakan rumus .

**Contoh :**

Tentukan matriks kofaktor dan matriks adjoin dari matriks berikut

Matriks kofaktornya , sehingga matriks .

Berdasarkan ekspansi baris pertama diperoleh nilai determinan matriks



Dengan nilai determinan dan matriks adjoin dapat diperoleh invers matriksnya

1. **Metode Gauss Jordan**
2. **Mencari Inver dengan operasi baris elementer (OBE)**

Untuk mencari invers suatu matriks *A* yang dapat dibalik adalah dengan mencari urutan operasi baris elementer tereduksi *A* pada matriks satuan dan kemudian melakukan urutan operasi yang sama ini pada untuk mendapatkan .

**Contoh :**

Carilah invers dari matriks

Penyelesaian :

Jadi,

**Contoh :**

Carilah invers dari matriks

Penyelesaian :

Jadi,

**Contoh :**

Carilah invers dari matriks

Penyelesaian :

Karena terdapat sebuah baris yang semua elemennya nol pada ruas kiri, maka matriks *B* tidak punya invers atau tidak dapat dibalik.

1. **Mencari Inver dengan operasi kolom elementer (OKE)**

Untuk mencari invers suatu matriks *A* yang dapat dibalik adalah dengan mencari urutan operasi baris elementer tereduksi *A* pada matriks satuan dan kemudian melakukan urutan operasi yang sama ini pada untuk mendapatkan .

**Contoh :**

Carilah invers dari matriks

Penyelesaian :

Jadi,

**Faktorisasi Matriks**

Faktorisasi suatu bilangan misalnya juga berlaku pada matrik. Jadi sebuah matriks dapat dituliskan dalam perkalian dua atau lebih matriks yang disebut : ***faktorisasi matriks.***

**Contoh :**

**Faktorisasi LU**

Suatu matriks bujur sangkar *A* dapat difaktorisasi menjadi matriks *L* (matriks segitiga bawah) dan matriks *U* (matriks segitiga atas), sehingga .

**Contoh :**

Terdapat 3 matriks elementer yang mereduksi matriks *A* menjadi matriks *U.*

Oleh karena itu

Sehingga diperoleh :

**Aritmatika Modulo**

Aritmatika modulo merupakan sebuah operasi yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lainnya. Didefinisikan operasi modulo sebagai berikut.

Misalkan *a* adalah bilangan bulat dan *m* adalah bilangan bulat > 0. Operasi *a* mod *m* memberikan sisa jika *a* dibagi dengan *m.* Dengan kata lain, *a* mod *m* = *r* sedemikian hingga , dengan .

Atau dapat dituliskan sebagai, untuk sebarang bilangan bulat *a* dan modulus *m,* misalkan

*R* = sisa bagi dari

Maka, *r* (disebut residu) sebagai hasil dari *a* mod *m* adalah

Dalam aritmatika modulo juga dikenal kekongruenan atau *equivalent.* Jika *m* adalah bilangan bulat positif dan *a* serta *b* adalah bilangan bulat, maka dikatakan *a* kongruen terhadap *b* dalam modulus *m* dan dapat ditulis(mod *m*) atau dengan kata lain jika adalah kelipatan bilangan bulat dari *m.*

Modulo juga mempunyai balikan modulo (invers modulo). Jika *a* dan *m* relatif prima dan maka terdapat suatu bilangan yang merupakan balikan inversi (dinotasikan dengan ) yang memenuhi (mod *m*).

**Contoh**

Diberikan bilangan modulo 5 = {1, 2, 3, 4}

|  |  |
| --- | --- |
| Bilangan Rasional | Bilangan dalam Modulo 5 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 0 |
| 6 | 1 |
| 7 | 2 |
| 8 | 3 |
| 9 | 4 |
| 10 | 0 |

Dari tabel tersebut dapat dituliskan

Mudahnya untuk mengetahui 13 itu ekuivalen dengan berapa dalam modulo 5, caranya tinggal bagi 13 dengan 5, sisanya itu adalah hasil transformasi dalam modulo 5. Seperti ini sisa . Jadi Selanjutnya, , sehingga artinya dalam modulo 5, bilangan 13 dan 28 itu kongruen.

Dalam sistem bilangan rasional, itu sama dengan karena Selanjutnya, akan dicari inversnya dalam modulo (karena hanya ada bilangan ). Kita akan coba satu persatu.

Ternyata itu *x* nya adalah 2 karena . Jadi invers dari 3 dalam modulo 5 adalah 2.

Hal ini jadi terbukanya hubungan bilangan rasional dengan bilangan dalam modulo. Contoh lainnya .

**Determinan Matriks Modulo**

Determinan matriks dapat dicari dengan ekspansi baris atau kolom. Berikut diberikan contoh mendapat determinan matriks modulo.

**Contoh :**

Diberikan matriks dalam modulo 26.

Penyelesaian :

* Metode kofaktor berdasarkan ekspansi baris pertama.

**Invers Matriks Modulo**

Invers matriks dapat dicari dengan operasi baris atau kolom elementer dan matriks adjoin. Sebuah matriks persegi dikatakan memiliki invers matriks jika dan hanya jika dan .

Keterangan :

*Gcd* : *The greaatest common divisor* / Faktor persekutuan terbesar (FPB)

: Determinan matriks *A*

*n* : Modulo

**Contoh :**

Diberikan matriks dalam modulo 26.

Penyelesaian :

* Kofaktor baris pertama.

* Kofaktor baris kedua.

* Kofaktor baris ketiga.

Matriks kofaktornya , sehingga matriks .

Berdasarkan ekspansi baris pertama diperoleh nilai determinan matriks

Dengan nilai determinan dan matriks adjoin dapat diperoleh invers matriksnya

.

**BAB IV**

**VEKTOR**

1. **Pendahuluan**

**Definisi**

Vector didefinisikan sebagai besaran yang memiliki arah. Kecepatan, gaya dan pergeseran merupakan contoh-contoh dari vector karena semuanya memiliki besar dan arah walaupun untuk kecepatan arahnya hanya positif dan negatif. Vector dikatakan berada diruang *n*  jika vector tersebut mengandung *n* komponen. Jika vector berada di maka dikatakan vector dibidang, sedangkan jika vector berada di maka dikatakan vector berada diruang. Secara geometris, dibidang dan diruang vector merupakan segmen garis berarah yang memiliki titik awal dan titik akhir. Vector biasa dinotasikan dengan huruf kecil tebal atau huruf kecil dengan ruas garis.

**Contoh**

Dari gambar diatas terlihat beberapa segmen garis berarah (vektor) seperti , dan dengan *A* disebut sebagai titik awal, sedangkan titik *B, C* dan *D* disebut titik akhir.

Vector posisi didefinisikan sebagai vector yang memiliki titik awal **O** (untuk vector dibidang, titik **O** adalah ).

1. **Operasi pada vector**
2. **Penjumlahan dua vector**

Misalkan dan adalah vector-vektor yang berada diruang yang sama, maka vector didefinisikan sebagai vector yang titik awalnya dan titik akhirnya .

**Contoh**

Perhatikan gambar pada contoh diatas. Misalkan dan , jika vector didefinisikan sebagai , maka akan memiliki titik awal *A* dan titik akhir *C,* jadi merupakan segmen garis berarah .

1. **Perkalian vector dengan scalar**

Vektor nol didefinisikan sebagai vector yang memiliki panjang 0. Misalkan vektor tak nol dan *k* adalah scalar, Perkalian vector dengan scalar *k* didefinisikan sebagai vector yang panjangnya kali panjang dengan arah :

Jika (searah dengan )

Jika (berlawanan arah dengan )

1. **Perhitungan vector**

Diketahui dan vektor-vektor diruang yang komponen-komponennya adalah dan maka perhitungan vektornya didefinisikan sebagai berikut :

Jika kemudian titik koordinat dan maka

1. **Hasil kali titik (*Dot product*)**
2. **Hasil kali titik dua vector jika diketahui komponennya**

Diketahui dan , maka hasil kali titik antara vector dan didefinisikan sebagai berikut :

1. **Hasil kali titik dua vector jika diketahui panjang vector dan sudut antara dua vektor**

Diketahui dan dua buah vector yang memiliki panjang berturut-turut dan sedangkan sudut yang dibentuk oleh kedua vector adalah , sudut ini terbentuk dengan cara menggambarkan kedua vector pada titik awal yang sama. Hasil kali titik antara vector dan didefinisikan sebagai :

. ; dimana

Jadi hasil kali titik dua vector berupa scalar.

Dengan mengetahui besarnya , akan diketahui apakah hasil kali titik akan bernilai positif atau negative.

jika dan hanya jika sudut lancip

jika dan hanya jika ( dan saling tegak lurus)

jika dan hanya jika sudut tumpul

**Contoh**

Diketahui dan , tentukan nilai *k* agar dan saling tegak lurus.

Penyelesaian :

Agar dan saling tegak lurus, maka haruslah

.

* **Panjang (norm) vector**

Misalkan , dengan menggunakan operasi hasil kali titik jika diketahui komponen vektornya maka didapat

…………..(1)

Dari hasil kali titik jika diketahui panjang vector dan sudut antara dua vektor

…………….(2)

Dalam hal ini sudut antara vector dan vector adalah karena keduanya saling berhimpit.

Dari persamaan 1 dan 2, maka didapat persamaan berikut.

* **Jarak antara dua vector**

Jarak antara vector dan didefinisikan sebagai panjang dari vector dan biasanya dinotasikan dengan

1. **Hasil kali silang (*Cross Product*)**

Diketahui dan , perkalian antara dua vector dan didefinisikan sebagai berikut.

**BAB V**

**SISTEM PERSAMAAN LINIER**

1. **Pendahuluan**

Suatu persamaan linier yang memuat *n* variabel dinyatakan dalam bentuk dengan adalah konstanta riil. Dalam hal ini, variabel yang dimaksud bukan merupakan fungsi trigonometri, fungsi logaritma ataupun fungsi eksponensial.

**Contoh**

1. (persamaan linier dengan 2 variabel)
2. (persamaan linier dengan 3 variabel)
3. (bukan persamaan linier)
4. (bukan persamaan linier)

Pada sistem persamaan linier dengan dua variabel, secara geometris jika SPL tidak mempunyai penyelesaian maka grafiknya berupa dua garis yang saling sejajar, jika penyelesaiannya tunggal maka himpunan penyelesaiannya berupa sebuah titik hasil perpotongan dua garis sedangkan jika penyelesaiannya banyak maka himpunan penyelesaiannya berupa dua garis lurus yang saling berhimpit. Secara lebih jelas dapat dilihat pada contoh berikut.

**Contoh**

Grafik tersebut menunjukkan bahwa kedua garis sejajar sehingga tidak penyelesaian yang memenuhi sehingga disimpulkan bahwa SPL tidak konsisten.

Grafiknya tersebut menunjukkan bahwa himpunan penyelesaian dari SPL adalah titik potong antara dan yaitu titik Jadi penyelesaian dari SPL adalah tunggal yaitu dan

Grafik diatas bahwa dan saling berhimpit sehingga hanya terlihat seperti satu garis saja. Himpunan penyelesaian dari SPL semua titik yang terletak disepanjang garis tersebut. Misalkan diambil maka didapatkan yang memenuhi persamaan. Jika maka nilai adalah nilai yang memenuhi. Secara matematis dapat dituliskan sebagai

Untuk kasus sistem persamaan linier dengan menggunakan dua variabel, pembuatan grafik untuk menentukan himpunan penyelesaian seperti ini masih memungkinkan, hanya saja untuk jumlah variabel yang lebih banyak hal ini sulit dilakukan.

**Sistem Persamaan Linier (SPL)**

Sistem persamaan linier adalah himpunan berhingga dari persamaan linier.

Bentuk umum

dimana adalah variabel dan adalah konstanta.

Jika SPL diatas ditulis dalam bentuk matriks, maka :

Suatu matriks yang berbentuk :

dinamakan *matriks yang diperbesar* (augmented matrix).

Jika maka SPL tersebut disebut *sistem persamaan linier homogen*.

Jika tidak semuanya nol, maka SPL tersebut disebut *sistem persamaan linier nonhomogen.*

Tidak semua sistem persamaan linier memiliki penyelesaian (solusi), sistem persamaan linier yang memiliki penyelesaian memiliki dua kemungkinan yaitu penyelesaian tunggal dan penyelesaian banyak. Secara lebih jelas dapat dilihat pada diagram berikut :

Kemungkinan-kemungkinan solusi sistem persamaan linier adalah

1. Tidak mempunyai penyelesaian.
2. Mempunyai tepat satu penyelesaian.
3. Mempunyai tak hingga banyak penyelesaian.

Sistem persamaan linier yang tidak mempunyai solusi disebut *tak konsisten* (inconsistent). Jika ada sekurang-kurangnya satu penyelesaian, maka sistem persamaan linier tersebut *konsisten* (consistent).

**Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linier**

Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier, metode-metode tersebut adalah :

1. Metode subtitusi
2. Metode eliminasi
3. Metode campuran (eliminasi dan subtitusi)
4. Metode Cramer
5. Metode invers matriks
6. Metode Gauss
7. Metode Gauss Jordan

Berikut penjelasan lebih rinci terkait metode penyelesaian sistem persamaan linier.

**Metode Subtitusi**

Metode subtitusi adalah metode atau cara menyelesaikan sistem persamaan linier dengan mengganti salah satu variabel dari suatu persamaan dengan variabel yang diperoleh dari persamaan linier yang lainnya.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

**Contoh**

**Penyelesaian**

Berdasarkan persamaan (1) maka diperoleh

⇒

Selanjutnya, masukkan persamaan (1) kedalam persamaan (2) untuk mencari nilai *y*

Lebih lanjut, disubtitusikan nilai *y* kedalam persamaan (1) atau (2) untuk mendapatkan nilai *x*.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah .

**Metode Eliminasi**

Metode eliminasi adalah metode atau cara penyelesaian sistem persamaan linier dengan cara mengeliminasi atau menghilangkan salah satu variabel dengan menambahkan atau mengurangkan dengan menyamakan koefisien yang akan dihilangkan tanpa memperhatikan nilai positif atau negatif.

Apabila variabel yang akan dihilangkan bertanda sama, maka untuk mengeliminasi menggunakan sistem operasi pengurangan. Sebaliknya apabila variabel yang akan dihilangkan bertanda berbeda, maka untuk mengeliminasi menggunakan operasi penjumlahan.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

**Contoh**

**Penyelesaian**

Langkah pertama :

Lakukan eliminasi dengan mengurangkan untuk menghilangkan variabel atau koefisien *x* untuk mengetahui nilai *y*

Langkah selanjutnya :

Lakukan eliminasi dengan mengurangkan untuk menghilangkan variabel atau koefisien *y* untuk mengetahui nilai *x*

Jadi, himpunan penyelesaiannya yang dihasilkan sama yaitu .

**Metode Campuran (Eliminasi dan Subtitusi)**

Yang dimaksud dari metode ini, yaitu kita dalam mencari himpunan penyelesaian menggunakan dua metode boleh gunakan eliminasi terlebih dahulu setelah diketahui salah satu nilai variabel baik itu *x* atau *y* maka selanjutnya masukkan kedalam metode subtitusi atau sebaliknya.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

**Contoh**

**Penyelesaian**

Langkah pertama :

Lakukan eliminasi dengan mengurangkan untuk menghilangkan variabel atau koefisien *y* untuk mengetahui nilai *x*

Selanjutnya, subtitusikan nilai ke dalam salah satu persamaan :

Jadi, himpunan penyelesaiannya yang dihasilkan sama yaitu .

**Metode Crammer**

Metode Crammer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Suatu SPL yang berbentuk dengan *A* adalah matriks persegi dapat dikerjakan dengan metode Crammer jika hasil perhitungan menunjukkan bahwa . Penyelesaian yang didapatkan dengan metode ini adalah penyelesaian tunggal.

Diketahui suatu sistem persamaan linier berbentuk dengan *A* adalah matriks koefisien persegi dan sedangkan nilai *X* dan *B* adalah

Maka penyelesaian untuk *x* adalah

dimana adalah matriks *A* yang kolom ke-*i* nya diganti dengan vektor *B.*

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

**Contoh**

**Penyelesaian**

Sistem persamaan linier diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

Sehingga didapat matriks dan matriks

Selanjutnya, dicari .

Karena maka metode Crammer dapat digunakan.

Lebih lanjut, dicari dan

.

.

.

Jadi nilai untuk *x, y,* dan *z* adalah :

dan

**Metode Invers Matriks**

Sistem persamaan linier (SPL) dapat ditulis dalam bentuk matriks dengan *A* matriks koefisien yang berbentuk persegi, maka sifat dari penyelesaian SPL dapat diketahui dari nilai determinan *A* atau invers matriks *A*. Berikut ini adalah hubungan yang berlaku :

terdefinisi (ada) ↔ SPL punya penyelesaian tunggal

tidak memiliki invers

Pada kasus untuk menentukan penyelesaiannya dapat digunakan invers matriks untuk penghitungannya, yaitu

Sedangkan pada kasus untuk menentukan penyelesaian SPL harus digunakan eliminasi Gauss –Jordan pada matriks diperbesar .

**Contoh**

**Penyelesaian**

Sistem persamaan linier diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

Sehingga didapat matriks dan matriks

Selanjutnya, dicari .

Karena maka sistem persamaan linier tersebut mempunyai penyelesaiannya tunggal.